

Correction Devoir maison n°11

Exercice 1 - Espaces Vectoriels

1. Le programme suivant permet de vérifier si un vecteur X appartient à F . Le résultat donné sera 1 si le vecteur appartient bien à F et 0 sinon.

2. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -x + y + 2z = 0 \text{ et } y - 3z = 0 \right\}$

(a) On vérifie que

— $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

— $-0 + 0 + 2 \times 0 = 0$ et $0 - 3 \times 0 = 0$. Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

— Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, $x_2 - 3x_3 = 0$ et $-y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$, $y_2 - 3y_3 = 0$. On étudie

$$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} -(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + 2(\lambda x_3 + y_3) &= -\lambda x_1 - y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda 2x_3 + 2y_3 \\ &= \lambda(-x_1 + x_2 + 2x_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (\lambda x_2 + y_2) - 3(\lambda x_3 + y_3) &= \lambda x_2 + y_2 - 3\lambda x_3 - 3y_3 \\ &= \lambda(x_2 - 3x_3) + (y_2 - 3y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a montré que $\lambda X + Y \in F$ et donc

F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -x + y + 2z = 0 \text{ et } y = 3z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 5z \text{ et } y = 3z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 5z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$F = Vect \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) On montre que (u, v, w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0 &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_2 &= 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ 3\lambda_2 &= -3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_3 &= -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= -1 \\ \lambda_3 &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4u - v - w$$

Exercice 2

Soit $f : [-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x \ln(1+x)$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0; +\infty[$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) On sait que

- La fonction $x \rightarrow 1+x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1; +\infty[$ et est strictement positive sur cet intervalle.
- La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$.
- La fonction $x \rightarrow x$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1; +\infty[$

Donc par composée et produit de fonctions de classe \mathcal{C}^2 ,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0; +\infty[.}$$

On calcule

$$\boxed{\forall x \in] -1, +\infty[, f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, +\infty[, f''(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1+x}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in] -1, +\infty[, f''(x) = \frac{2+x}{(1+x)^2} > 0.}$$

La dérivée seconde est strictement positive donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est convexe sur }] -1, +\infty[.}$$

(b) Pour tout $x > -1$, $f''(x) > 0$ donc

$$\boxed{\text{la fonction } f' \text{ est strictement croissante.}}$$

Or $f'(0) = 0$ donc la fonction f' est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $] -1; 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } f \text{ est décroissante sur }] -1; 0] \text{ et croissante sur } [0, +\infty[.}$$

(c) On a $\lim_{x \rightarrow -1} x \ln(1+x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$ d'où le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

(d) On résout

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x \ln(1+x) = x \\ &\iff x \ln(1+x) - x = 0 \\ &\iff x(\ln(1+x) - 1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $x = 0$ ou $\ln(x+1) = 1 \iff x = e - 1$.

$$\mathcal{S} = \{0, e - 1\}.$$

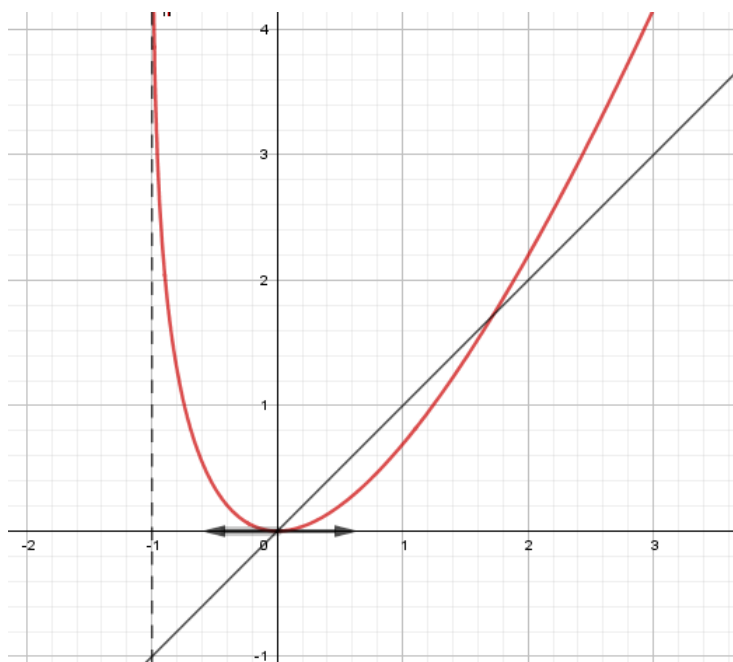
(e) On résout l'inéquation

$$f(x) > x \iff x \ln(x+1) > x \iff x(\ln(x+1) - 1) > 0.$$

A l'aide d'un tableau de signe, on remarque que cette inéquation est vérifiée pour $x \in]-1; 0[$ et pour $x \in]e - 1; +\infty[$. Donc

La courbe est au dessus de la droite $y = x$ sur $] - 1; 0[$ et sur $]e - 1; +\infty[$.

(f) On trace la tangente horizontale en 0, l'asymptote verticale en -1 et la droite d'équation $y = x$.



2. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0; e - 1[$.

(a) On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n < e - 1\}$.

- **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $0 < u_0 < e - 1$. Or Ainsi, \mathcal{P}_0 est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . La fonction f étant croissante sur $]0, e - 1[$, on a

$$\begin{aligned} 0 < u_n < e - 1 &\implies f(0) < f(u_n) < f(e - 1) \\ &\implies 0 < u_{n+1} < e - 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < e - 1$

(b) On sait que $\forall x \in]0, e - 1[$, $x > f(x)$ donc $u_n > f(u_n)$ c'est à dire $u_n > u_{n+1}$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.

(c) Notons ℓ la limite de (u_n) . D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. Et d'après la question 1(d), $\ell = 0$ ou $\ell = e - 1$.

Or comme (u_n) est décroissant, on a nécessairement $u_n > \ell$ et on sait que $u_n < e - 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1[$ ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{X} = 0$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = 0 = f(0)$$

Ainsi la fonction f est continue en 0 et donc sur $[0, 1[$.

Pour étudier la dérivabilité en 0, on étudie le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

Or en utilisant les croissances comparées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x \ln(x) = 0$ et donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

2. On a montré précédemment que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, 1[$. On calcule la dérivée seconde

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f''(x) = \frac{(\ln(x))^2 + 2x \frac{\ln(x)}{x}}{(x(\ln(x))^2)^2} = \frac{\ln(x)(\ln(x) + 2)}{(x(\ln(x))^2)^2}$$

Or pour $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$ et

$$\begin{aligned} \ln(x) + 2 < 0 &\iff \ln(x) < -2 \\ &\iff x < e^{-2} \end{aligned}$$

On trace le tableau de signe pour f''

x	0	e^{-2}	1
Signe de $\ln(x)$		-	-
Signe de $\ln(x) + 2$	-	0	+
Signe de $f''(x)$	+	0	-

La fonction f est donc convexe sur $]0, e^{-2}[$ et concave sur $]e^{-2}; 1[$.

3. La fonction f possède un unique point d'inflexion en $x = e^{-2}$. En effet sa dérivée seconde s'annule et change de signe en ce point. La tangente en f en ce point :

$$y = f'(e^{-2})(x - e^{-2}) + f(e^{-2})$$

Or $f'(e^{-2}) = -\frac{e^2}{4}$ et $f(e^{-2}) = \frac{-1}{2}$. Ainsi,

$$y = -\frac{e^2}{4}(x - e^{-2}) - \frac{1}{2} = -\frac{e^2}{4}x - \frac{1}{4}$$

4. On trace la courbe

